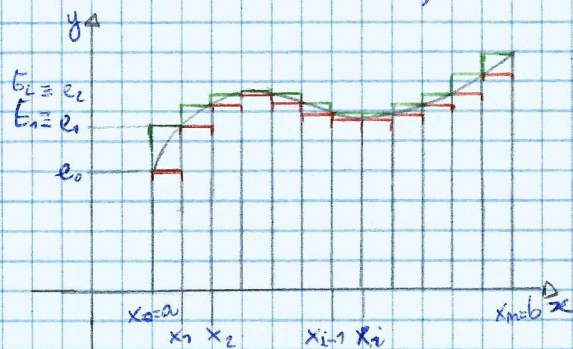


## L'integrale definito (1 parte)

Passiamo ora all'integrale definito. Essò, in generale, ci dice il valore dell'area sottesa dalla funzione cui è applicato.

Funzione integrabile secondo Riemann

Consideriamo una funzione, per comodità continua (può presentarsi anche discontinua di qualsiasi specie, ma in tal caso dobbiamo inserire molte condizioni);



Dividiamo l'area sottesa in tanti rettangoli di identica base. Abbiamo infatti diviso in  $n$  parti il tratto di asse  $x$  sotteso dalla funzione. Chiamiamo gli estremi di ogni tratto nel modo seguente, raggruppandoli in un insieme:

$$P_n = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

La suddivisione dell'area sottesa dalla funzione potrà essere ottenuta in due modi:

- per difetto (scalare rosso): in tal caso si moltiplica ogni "braccio" di base per il minimo che la funzione raggiunge in quel tratto. Si ottiene dunque in ogni singolo intervallo un rettangolo di area minore di quella realmente sottesa dal tratto di funzione. Ciò ripercuote sull'area totale ottenuta, minore di quella sottesa dalla funzione.

In termini matematici:

detto, per un intervallo generico:  $e_i = \inf f[x_i, x_{i+1}]$

$$\text{si ha: } S(f; P_n) = (x_1 - x_0) \cdot e_0 + (x_2 - x_1) \cdot e_1 + \dots + (x_i - x_{i-1}) \cdot e_i + \dots + (x_{i+1} - x_i) \cdot e_{i+1} + \dots + (x_n - x_{n-1}) \cdot e_{n-1}$$

Otteniamo così l'area dello scalare inscritto;

- per eccesso (scalare verde): in tal caso si moltiplica ogni "braccio" di base per il massimo che la funzione raggiunge in quel tratto. Si ottiene dunque in ogni singolo intervallo



valle un rettangolo di area maggiore di quella realmente sottesa dal tratto di funzione. Ciò si ripete sull'area totale ottenuta, maggiore di quella sottesa dalla funzione. Come già nel caso precedente, esprimiamo tale area in termini matematici sommando i vari rettangoli:

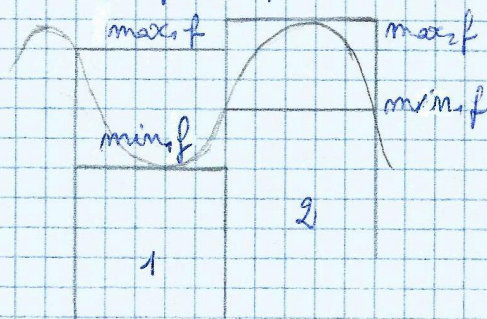
della, per un intervallo generico:  $\bar{b}_i = \max f[x_i; x_{i+1}]$

$$\text{vale: } S(f; P_m) = (x_1 - x_0) \cdot \bar{b}_1 + (x_2 - x_1) \cdot \bar{b}_2 + \dots + (x_i - x_{i-1}) \cdot \bar{b}_{i+1} + \dots + (x_m - x_{m-1}) \cdot \bar{b}_m$$

Otteniamo così l'area dello scalare circoscritto.

Lo scalare inscritto e l'area della regione sottesa dalla funzione formata dai rettangoli che approssimano l'area della regione per difetto; lo scalare circoscritto e l'area della regione sottesa dalla funzione formata dai rettangoli che approssimano l'area della regione per eccesso.

Nel grafico precedente si osserva che spesso il  $\min f$  di un tratto coincide con  $\max f$  di quello precedente. Ciò non è mai, certo non sempre vero. Infatti, nel caso seguente:



nessun  $\max f / \min f$  dell'area 2 coincide con  $\max f / \min f$  dell'area 1.

Notiamo ora che:

- l'area dello scalare inscritto cresce (o rimane tale) aggiungendo anche un solo punto al tratto dell'asse  $x$  considerato;

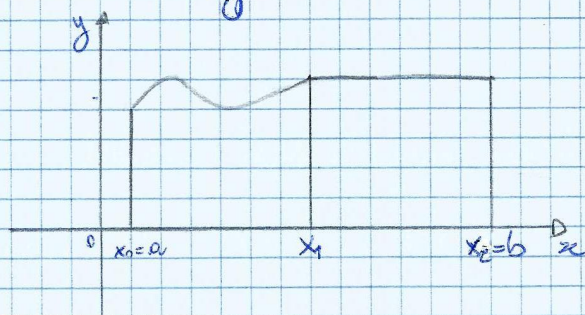
$$\forall m \in \mathbb{N} \quad s(f; P_{m+1}) \geq s(f; P_m)$$

- l'area dello scalare circoscritto decresce (o rimane tale) aggiungendo anche un solo punto al tratto dell'asse  $x$  considerato.

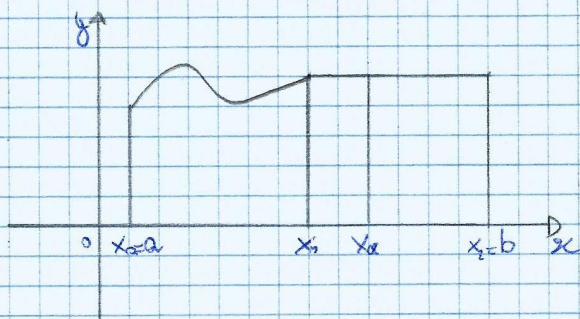
$$\forall m \in \mathbb{N} \quad S(f; P_{m+1}) \leq S(f; P_m)$$



Abbiamo precisato che l'area può rimanere costante perché, osservando la funzione seguente:



aggiungendo un punto  $x_2$  tra  $x_1$  e  $x_2$  e considerando le aree dei due rettangoli che si generano dalla scissione di quello unico, non cambiamo né l'area dello scalare inscritto né quella dello scalare circoscritto:



Ora possiamo completare il discorso per comprendere quando una funzione sia integrabile secondo Riemann.

Se aumentiamo o diminuiamo il numero  $n$  di intervalli in cui dividiamo il tratto appartenente all'asse  $x$ , lo scalare per difetto aumenterà piano piano fino a raggiungere il vero valore dell'area sottesa dal grafico della funzione, così (ricordando che  $n \in \mathbb{N}$  e, esistendo in tale insieme solo l'infinito positivo, nel  $\lim$ , mi basterà non dargli il segno di meno):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s(f; P_n) = \int_a^b f(x) dx$$

Anche lo scalare per eccesso raggiungerà il valore reale dell'area, ma lo farà riducendosi progressivamente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(f; P_n) = \int_a^b f(x) dx$$

Il trattino sotto la "a" indica lo scalare inscritto (per difetto), quello sopra la "b" lo scalare circoscritto (per eccesso).

In ogni caso, i valori  $e_n, e_i$  (per lo scalare inscritto) e i valori  $b_n, b_i$  (per lo scalare circoscritto) divergono la funzione  $f(x)$  contenuta nell'integrale. Gli intervalli  $(x_1 - x_0), (x_2 - x_1)$  si riducono a infinitesimi  $dx$  (per cui è moltiplicato  $f(x)$ ).



Allora, se:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(f; P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S(f; P_n)$$

cioè se:

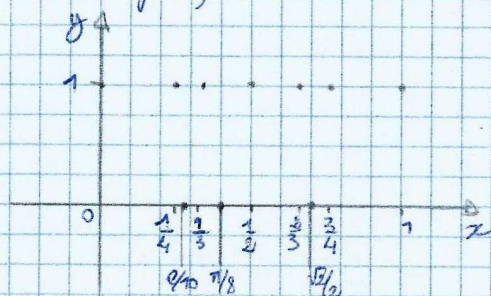
$$\int_a^b f(x) \cdot dx = \int_a^b f(x) \cdot dx$$

si dice che  $f(x)$  è integrabile secondo Riemann e si scrive:  $A = \int_a^b f(x) \cdot dx$

Così può sembrare banale, ma non è sempre vero. Consideriamo ad esempio la funzione di Dirichlet così definita:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0; 1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in [0; 1] \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \end{cases}$$

La funzione assume valore 1 per i valori di  $x$  compresi tra 0 e 1 e al contempo appartenenti all'insieme  $\mathbb{Q}$  (numeri razionali). Assume invece valore 0 per i valori di  $x$  compresi sempre tra 0 e 1, ma al contempo appartenenti all'insieme  $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ , cioè derivata dall'esclusione dai valori di  $\mathbb{R}$  dei valori di  $\mathbb{Q}$ . Il grafico di  $f(x)$  sarà allora circa il seguente:



Proviamo a calcolare gli integrali inscritti e circoscritti:

- integrale inscritto:  $\int_0^1 f(x) \cdot dx = 0(x_1 - x_0) + 0(x_2 - x_1) + \dots + 0(x_n - x_{n-1}) = 0$

- integrale circoscritto:  $\int_0^1 f(x) \cdot dx = 1(x_1 - x_0) + 1(x_2 - x_1) + \dots + 1(x_n - x_{n-1}) = 1$

Qualsiasi intervallo consideriamo, tra i suoi estremi ci sarà sempre un numero irrazionale non periodico la cui immagine sarà  $\pi$  o. Ad esempio, tra 0 e  $1/n$  sta  $\pi/4n$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ ):

$$0 < \frac{\pi}{4n} < \frac{1}{n}$$

Anche scegliendo un  $n$  molto grande per avere un intervallo molto piccolo, tra 0 e  $1/n$  c'è sempre, ad esempio,  $\frac{\pi}{4n}$  (ricorda che  $\pi$  è compreso tra 0 e 1). Per questo motivo in ogni intervallo il minimo è 0. Analogamente si dimostra che in ogni intervallo



il massimo è 1 (ad esempio considerando  $0 < \frac{1}{2m} < \frac{\pi}{4m}$ ).

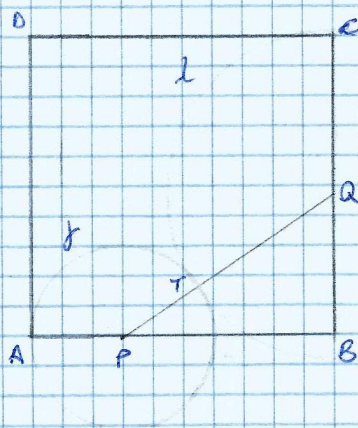
Essendo  $1 \neq 0$ , cioè  $\int_0^1 f(x) dx \neq \int_0^1 f(x) \cdot dx$ , la funzione  $f(x)$  non è integrabile secondo Riemann.

### Utilizzo dell'integrale definito

Come già abbiamo avuto modo di notare, l'integrale definito rende possibile il calcolo delle aree sottese da tratti di funzioni.

Per capire l'utilizzo pratico, proponiamo il problema n° del corso di ordinamento della sessione ordinaria dell'esame di stato 2010. Per risolvere il terzo e il quarto punto del problema faremo uso del teorema fondamentale del calcolo integrale e del teorema di Barrow, che già abbiamo usati nel 2010 di fisica, ma che non abbiamo né enunciato né dimostrato.

"Sia ABCD un quadrato di lato 1, P un punto di AB e f la circonferenza di centro P e raggio AP. Si prende sul lato BC un punto Q in modo che sia il centro di una circonferenza tangente per C e tangente esternamente a f."



1. Se  $AP = x$ , si provi che il raggio di  $r$  in funzione di  $x$  è dato da:

$$r(x) = \frac{1-x}{1+x}$$

Procediamo:

$$AP = x$$

$$PB = 1-x \quad \text{limiti geometrici } 0 \leq x \leq 1$$

Poniamo  $BQ = y$ , allora  $QC = 1-y$  (con  $0 \leq y \leq 1$ ).

$\triangle PBQ$  è un triangolo rettangolo. Si instaura pertanto la relazione:

$$PB^2 + BQ^2 = PQ^2$$

Sapendo che  $PB = 1-x$ ,  $BQ = y$  e  $PQ = 1-x+y$ , sostituiamo:



troviamo e ricominciamo  $y$ :

$$\begin{aligned}(1-x)^2 + (1-y)^2 &= (1-x+1-y)^2 \\ 1-2x+x^2 + 1-2y+y^2 &= (2-x-y)^2 \\ 1-2x+x^2 + 1-2y+y^2 &= 4+x^2+y^2-4x-4y+2xy \\ 2x+2y-2+2xy &= 0 \\ x+y-1+xy &= 0 \\ y(x+1) &= 1-x \\ y &= \frac{1-x}{1+x}\end{aligned}$$

Effettivamente abbiamo scoperto che  $\overline{a} = y = \frac{1-x}{1+x} = f(x)$ .

2. Riferito ad un sistema di coordinate  $xOy$  ortocentrico, indipendentemente dalle limitazioni poste ad  $x$  dal problema geometrico, il grafico di  $f(x)$ . La funzione  $f(x)$  è invertibile? Se sì, qual è il grafico della sua inversa?

$f(x) = \frac{-x+1}{x+1}$  è una funzione omografica. Sapendo che  $O'(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c})$ , si ha  $O'(-1; -1)$ . Inoltre  $D_f = ]-\infty; -1[ \cup ]-1; +\infty[$ .

Possiamo alle intersezioni cogli assi:

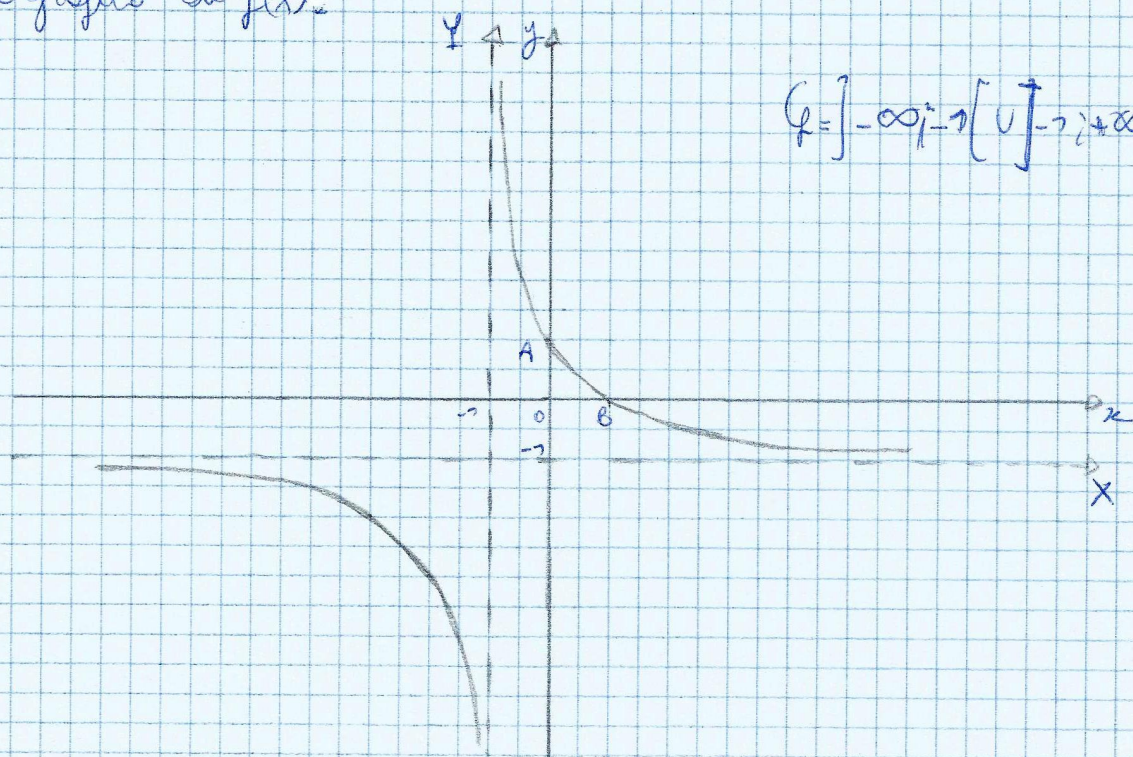
$$\text{axe } y \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$$

A(0;1)

$$\text{axe } x \begin{cases} y=0 \\ x=1 \end{cases}$$

B(1;0)

Ecco il grafico di  $f(x)$ :



$$D_f = ]-\infty; -1[ \cup ]-1; +\infty[$$

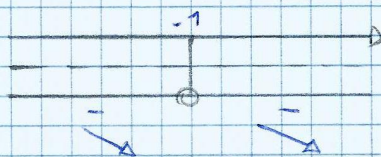


Dato che  $f: D_f \rightarrow C_f$  è iniettiva e suriettiva, abeliana, esse e invertibile. Possiamo anche sfruttare la derivata prima:

$$f'(x) = \frac{D(1-x) \cdot (1+x) - D(1+x) \cdot (1-x)}{(1+x)^2} = \frac{-1-x - 1+x}{(1+x)^2} = \frac{-2}{(1+x)^2} \geq 0$$

$$N \geq 0 \quad -2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$D > 0 \quad (x+1)^2 > 0 \quad \forall x \neq -1$$



Dato che  $f(x)$  è sempre decrescente nel suo insieme di definizione, esse è invertibile.

Ricaviamo allora la  $x$  della funzione:

$$(x+1)y = \frac{-x+1}{x+1} \quad (x+1)$$

$$xy + y = -x + 1$$

$$xy + x = 1 - y$$

$$x(y+1) = 1 - y$$

$$x = \frac{-y+1}{y+1}$$

Sostituiamo  $x$  con  $y$  e  $y$  con  $x$  e otteniamo la funzione inversa  $f^{-1}(x)$ :

$$y = \frac{-x+1}{x+1} = f^{-1}(x)$$

Essa ha lo stesso grafico di  $f(x)$ .

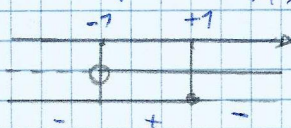
3. Sia  $g(x) = \left| \frac{1-x}{1+x} \right|$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ; qual è l'equazione della retta tangente al grafico di  $g(x)$  nel punto  $R(0,1)$ ? E nel punto  $S(1,0)$ ? Che cosa si può dire della tangente al grafico nel punto  $S$ ?

Studiamo il segno della funzione  $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ :

$$\frac{1-x}{1+x} \geq 0$$

$$N \geq 0 \quad x \leq 1$$

$$D > 0 \quad x \neq -1$$



$f(x)$  è negativa per  $x < -1 \vee x > 1$ , nulla per  $x = 1$ , positiva per  $-1 < x < 1$ . Allora possiamo scrivere:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x+1} & \text{per } x \in ]-\infty; -1[ \cup ]1; +\infty[ \\ \frac{1-x}{x+1} & \text{per } x \in ]-1; +1[ \end{cases}$$



Dobbiamo già disegnare il grafico di  $f(x)$ : ci basta considerare lo nell'intervallo opportuno.

Dobbiamo invece disegnare il grafico di  $-f(x)$  nell'intervallo  $n_2$  questo. Studiamo allora  $-f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ :

$$O'(-1; 1)$$

Intersezioni con:

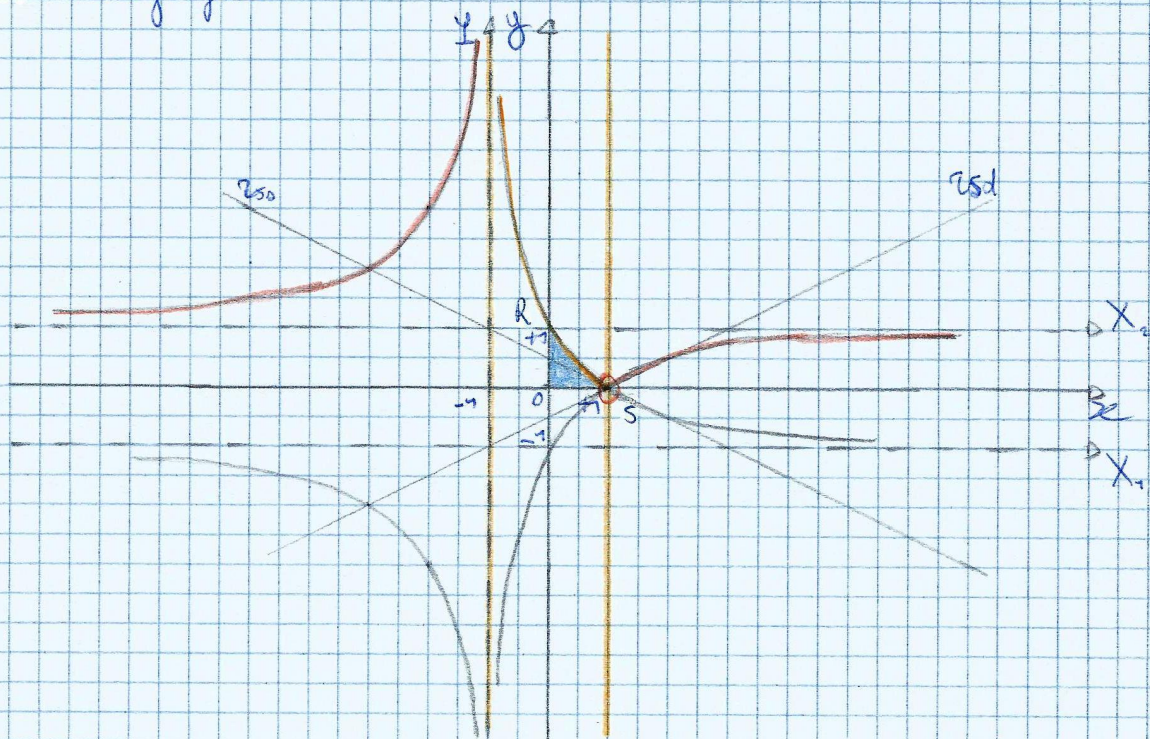
$$\text{asse } x \begin{cases} y=0 \\ x=1 \end{cases}$$

$$A'(1; 0)$$

$$\text{asse } y \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases}$$

$$B'(0; -1)$$

Tracciamo il grafico:



Considerando la derivata prima di  $f(x)$ , possiamo ottenere il coefficiente angolare della retta tangente in R:

$$f'(0) = \frac{-2}{(1+0)^2} = -2$$

Ora scriviamo l'equazione della retta:

$$\begin{cases} m_{tg} = -2 \\ q = 1 \end{cases}$$

$$r_R: y = -2x + 1$$

Già dal grafico notiamo che S è un punto di non derivata libera. Esisteranno, se esso è un punto angoloso, due tangenti differenti: sinistra e destra.

Dobbiamo allora calcolare la derivata prima  $f'(x)$  di  $f(x)$ . Poi procediamo come di consueto, sostituendo cioè  $x$  di S nelle due "espressioni" della  $f'(x)$ . Poi otteniamo



temo 9:

$$g'(x) = \begin{cases} \frac{D[x-1] \cdot (x+1) - D[x+1] \cdot (x-1)}{(x+1)^2} = \frac{x+1-x-1}{(x+1)^2} = \frac{-2}{(x+1)^2} & \text{per } x \in ]-\infty; -1[ \cup ]+1; +\infty[ \\ \frac{-2}{(x+1)^2} & \text{per } x \in ]-1; +1[ \end{cases}$$

che inserendo  $x_5$  otteniamo le due tangenti:

$$- \quad g'(1) = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \quad \begin{cases} m_{g_1} = \frac{1}{2} \\ q = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad r_{s_d}: y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} : \text{tangente destra}$$

$$- \quad g'(-1) = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \quad \begin{cases} m_{g_2} = -\frac{1}{2} \\ q = \frac{1}{2} \end{cases} \quad r_{s_s}: y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} : \text{tangente sinistra}$$

4. Si calcoli l'area del triangolo mistilineo ROS, dove l'arco RS appartiene all'arco di  $f(x)$  o, indifferentemente, di  $g(x)$ .

Per calcolare l'integrale definito. Essendo definito, esso ha due estremi  $a$  e  $b$  che coincidono con le ascisse degli estremi dell'intervallo considerato. Se gli estremi sono  $R$  ed  $S$ , si avranno  $a=0$  e  $b=1$ . L'area è sottesa dalla funzione  $f(x) = \frac{1-x}{x+1}$ . L'integrale sarà allora:

$$A_{ROS} = \int_0^1 \frac{1-x}{x+1} dx$$

Il teorema fondamentale del calcolo integrale ci consente di collegare l'integrale definito alla primitiva della funzione contenuta in esso. Lo racchiuderemo poi in parentesi quadre e svilupperemo a destra delle stesse gli estremi  $a$  ed  $b$ . Procederemo con la divisione per ottenere la primitiva di  $f(x)$  considerando l'integrale indefinito:

$$\int \frac{1-x}{x+1} dx = \int \frac{1}{x+1} dx - \int \frac{x}{x+1} dx = \ln|x+1| - \int 1 dx + \int \frac{1}{x+1} dx = \ln|x+1| - x + \ln|x+1| + K = 2\ln|x+1| - x + K$$

|        |       |
|--------|-------|
| $x$    | $x+1$ |
| $-x-1$ | $1$   |
| $u-1$  |       |

torneremo a quello definito scegliendo la primitiva con  $K=0$ :

$$\int_0^1 \frac{1-x}{x+1} dx = [2\ln|x+1| - x]_0^1$$



Il teorema di Barrow-Barrow ci consente di sostituire 1 nell'espressione contenuta tra le parentesi e sottrargli la stessa espressione in cui però andiamo a sostituire 0:

$$\int \frac{1-x}{1+x} dx = [2\ln(x+1) - x]_0^1 = 2\ln 2 - 1 - 2\ln 1 + 0 = 2\ln 2 - 1 = \text{Area}$$

Notando che 0 e 1 rendono l'argomento del logaritmo positivo in partenza potremo, per questo integrale definito, omettere il modulo. Abbiamo così ottenuto l'area del triangolo mistilineo ROS (quella colorata di blu nel grafico).

L'integrale improprio: gli integrali "si aprono" col limite

In alcuni casi funzione integranda e estremi dell'integrale non sono coerenti tra loro. Prendiamo ad esempio il caso seguente:

$$\int_0^1 \ln \frac{x}{x+1} dx$$

Il logaritmo di zero non esiste. Dovremo però usare il limite per "x" che tende a zero per calcolarlo e sostituire 0 con

$$\int_0^1 \ln \frac{x}{x+1} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \ln \frac{x}{x+1} dx$$

Per procedere passiamo all'integrale indefinito:

$$\begin{aligned} \int \ln \frac{x}{x+1} dx &= x \cdot \ln \frac{x}{x+1} - \int x \cdot \frac{1}{\frac{x}{x+1}} \cdot \frac{D(x) \cdot (x+1) - D(x+1) \cdot x}{(x+1)^2} dx = \\ &= x \ln \frac{x}{x+1} - \int x \cdot \frac{x+1}{x} \cdot \frac{x+1-x}{(x+1)^2} dx = x \ln \frac{x}{x+1} - \int \frac{1}{x+1} dx = \\ &= x \ln \frac{x}{x+1} - \ln(x+1) + K \end{aligned}$$

Torniamo ora all'integrale definito. Non è più necessario mettere il modulo all'argomento del logaritmo poiché l'intervallo compreso tra gli estremi dell'integrale è interamente compreso nel dominio del logaritmo:

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \ln \frac{x}{x+1} dx &= \lim_{a \rightarrow 0^+} [x \ln \frac{x}{x+1} - \ln(x+1)]_a^1 = 1 \ln \frac{1}{2} - \ln 2 + \\ &- \lim_{a \rightarrow 0^+} (a \ln \frac{a}{a+1} - \ln(a+1)) = \ln 1 - \ln 2 - \ln 2 - \lim_{a \rightarrow 0^+} (a \ln a - a \ln(a+1) - \ln(a+1)) \\ &= -2 \ln 2 - \lim_{a \rightarrow 0^+} \left( \overbrace{\ln a}^{\rightarrow -\infty} - \overbrace{a \ln(a+1)}^{\rightarrow 0} - \overbrace{\ln(a+1)}^{\rightarrow \ln 1} \right) = -2 \ln 2 \end{aligned}$$

Con x vicino in modo rigoroso un logaritmo in un integrale le "anomalie" come il precedente (per questo l'integrale viene detto improprio)



L'integrale è "anomalo" anche quando presenta in uno dei suoi estremi  $\pm\infty$ . Tornando all'integrale precedente, chiamogli estremi 2 e  $+\infty$ . Lo risolviamo anche in questo caso col limite:

$$\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x+1} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_2^a \frac{\ln x}{x+1} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \left[ x \ln \frac{x}{x+1} - \ln(x+1) \right]_2^a =$$

$$= \lim_{a \rightarrow +\infty} \left[ a \ln \frac{a}{a+1} - \ln(a+1) \right] - \left( 2 \ln \frac{2}{3} - \ln 3 \right) = \lim_{a \rightarrow +\infty} \left[ \ln \left( \frac{a}{a+1} \right)^a \cdot \frac{1}{a+1} \right] - 2 \ln \frac{2}{3} + \ln 3$$

Ora dividiamo  $a$  per  $a+1$ :

|        |       |
|--------|-------|
| $a$    | $a+1$ |
| $-a-1$ | 1     |
| $a-1$  |       |

Concludiamo l'integrale:

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \left[ \ln \left[ \left( 1 + \frac{1}{-a-1} \right)^{-a-1} \cdot \frac{1}{a+1} \right] \right] - 2 \ln \frac{2}{3} + \ln 3$$

Prendiamo  $b = -a-1$ , da cui  $a = -b-1$ , se  $a \rightarrow +\infty$ ,  $b \rightarrow -\infty$ :

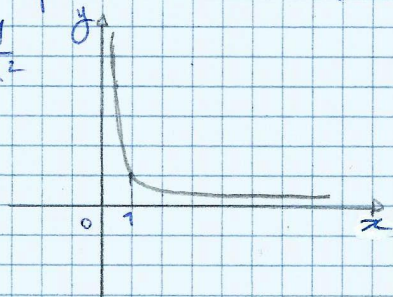
$$\lim_{b \rightarrow -\infty} \left( \ln \left[ \left( 1 + \frac{1}{b} \right)^{b-1} \cdot \frac{1}{(-b)} \right] \right) - 2 \ln \frac{2}{3} + \ln 3 =$$

$$= \lim_{b \rightarrow -\infty} \left( \ln \left[ \left( 1 + \frac{1}{b} \right)^b \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{(-b)} \right] \right) - 2 \ln \frac{2}{3} + \ln 3 = \lim_{b \rightarrow -\infty} \left( \ln \left[ \left( 1 + \frac{1}{b} \right)^b \right] \right) - 2 \ln \frac{2}{3} + \ln 3 =$$

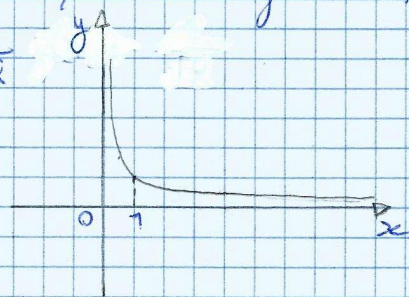
$$= -1 + \ln e - 2 \ln \frac{2}{3} + \ln 3 = -\infty$$

Questo imparato ci permette di svolgere due esercizi per fare alcune considerazioni riguardo l'area sotto da funzioni che, ad esempio, vanno a  $+\infty$  per  $x \rightarrow 0$  e a 0 per  $x \rightarrow +\infty$ , come le seguenti:

a)  $f(x) = \frac{1}{x^2}$



b)  $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$



Calcolando l'area sotto da dalle funzioni, ad esempio, tra 0 e 1 notiamo che:

a)  $A_f = \int_0^1 \frac{1}{x^2} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \frac{1}{x^2} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \left[ -\frac{1}{x} \right]_a^1 = -1 + \frac{1}{a} = +\infty$ : si dice in questo caso che l'area diverge ("esplode" verso l'infinito);

b)  $A_g = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} [2\sqrt{x}]_a^1 = 2 - 2\sqrt{a} = 2$ : si dice in quest'altro caso che l'area converge (non va così velocemente all'infinito e si stabilizza allora su un valore finito).



## Uso dell'integrale definito per il calcolo di volumi

Consideriamo ora un esercizio che ci consente di applicare l'integrale definito al calcolo di un volume.

Consideriamo le due parabole seguenti e tracciamone il grafico. Possiamo poi calcolare il volume del solido generato dalla parte del piano delimitata dalle due parabole in una rotazione completa attorno all'asse  $x$ :

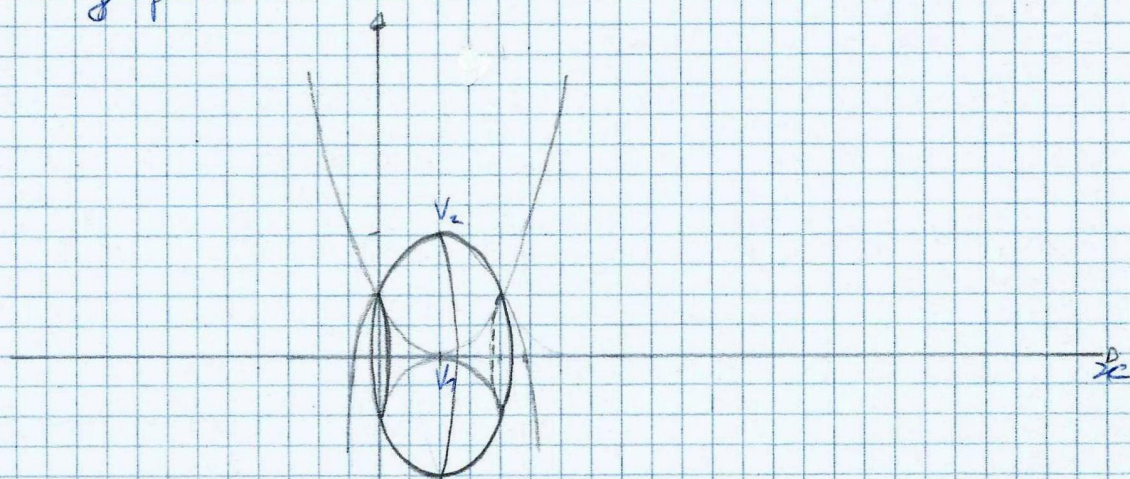
$$P_1: y = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$$

$$V_1(1; 0)$$

$$P_2: y = x^2 + 2x + 1$$

$$V_2(-1; +2)$$

Tracciamo il grafico:



Dalla rotazione della superficie si ottiene una sorta di ciambella. Calcoliamo allora dapprima il volume del solido generato dalla rotazione attorno all'asse  $x$  della parte della funzione  $P_1$  compresa tra 0 e 2. L'integrale rappresenta quella sommatoria di infiniti cilindri di altezza infinitesima  $dx$ . Moltiplicando tale  $dx$  per la superficie di base (un cerchio) del cilindro si ottiene il volume del cilindro stesso. Il raggio di ciascun cilindro è la  $f(x)$ :

$$V_R = \int_0^2 \pi [(x-1)^2]^2 dx = \pi \int_0^2 (x-1)^4 dx = \pi \cdot \left[ \frac{1}{5+1} \cdot (x-1)^{5+1} \right]_0^2 = \pi \left[ \frac{1}{6} \cdot (x-1)^6 \right]_0^2 = \pi \left( \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \right) = \frac{2}{3} \pi$$

Ora calcoliamo il volume ottenuto dalla rotazione della superficie sottesa dalla parabola 2 nel tratto tra 0 e 2:

$$V_L = \int_0^2 \pi (-x^2 + 2x + 1)^2 dx = \pi \int_0^2 (x^4 + 4x^2 + 1 - 2x^2 - 4x^3 + 4x) dx =$$



$$= \pi \int_0^2 (x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x + 1) dx = \pi \left[ \frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + x \right]_0^2 =$$

$$= \pi \left( \frac{32}{5} - 16 + \frac{16}{3} + 8 + 2 \right) = \pi \frac{36 - 240 + 80 + 120 + 30}{15} = \frac{86}{15} \pi$$

Ora, sottraendo a  $\frac{86}{15} \pi$  il volume ottenuto precedentemente  $\left(\frac{2}{5} \pi\right)$  otteniamo il volume richiesto!

$$V_R = \frac{86}{15} \pi - \frac{2}{5} \pi = \frac{80}{15} \pi = \frac{16}{3} \pi$$



## L'integrale definito (II parte)

Riprendiamo il discorso sugli integrali iniziata nel capitolo precedente.

Il teorema fondamentale del calcolo integrale  
 Enunciamo il teorema fondamentale del calcolo integrale: "Se  $f$  è una funzione continua in  $[a, b]$ , se  $x_0 \in [a, b]$  e se  $F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$   
 Ne segue che  $F$  è derivabile in  $x_0$  e  $F'(x_0) = f(x_0)$

Questo teorema presenta tre possibili applicazioni. Esaminiamone una ed una:

- l'integrale ha un estremo "a" fisso e una variabile  $x$ :

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

Abbiamo sempre avere  $x$  come estremo maggiore. E forse il minore sfruttando le proprietà dell'integrale definito:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt = - \int_x^a f(t) dt$$

Proviamo ad un esempio in cui sfruttare anche il teorema di de L'Hôpital; calcoliamo il seguente limite (sapendo che  $f(t) < 2$ ):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt}{2xe^x} = \text{FI. } \frac{0}{0}$$

A numeratore l'integrale viene zero perché l'area da calcolare è nulla (compresa tra 0 e 0!).

Proviamo applicare il teorema di de L'Hôpital perché:

- $2xe^x \neq 0 \quad \forall x$ ;
- $\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^x f(t) dt = \lim_{x \rightarrow 0} 2xe^x = 0$ ;
- esiste reale e finito  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{D[\int_0^x f(t) dt]}{D[2xe^x]}$ . Infatti, chiamando  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$  e sfruttando il teorema fondamentale del calcolo integrale vale:  
 $F'(x) = f(x)$ . Calcoliamo poi  $D[2xe^x] = 2(D[e^x] \cdot x + D[x] \cdot e^x) = 2e^x(x+1)$ .  
 Allora:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2e^x(x+1)} = 1$
- $f(x) = \int_0^x f(t) dt$  e  $g(x) = 2xe^x$  sono continue in  $\mathbb{R}$  e derivabili in  $\mathbb{R}$ .

Allora:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt}{2xe^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2e^x(x+1)} = 1$$

Abbiamo così risolto una forma indeterminata particolare;



- legato all'estremo precedente abbiamo quella in cui ad un estremo, anziché un'ale semplice  $x$ , c'è una sua funzione  $\alpha(x)$ , ad esempio. Dato allora:

$$F(x) = \int_a^{\alpha(x)} f(t) dt$$

Per calcolarne la derivata prima dobbiamo moltiplicare  $f(\alpha(x))$  per  $\alpha'(x)$ . Ovviamente  $\alpha(x)$  deve essere derivabile.

Ecco un esempio:

$$F(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sqrt{x}} \sin t^2 dt}{x\sqrt{x}}$$

Notiamo subito che abbiamo una forma indeterminata  $\frac{0}{0}$ . Dovremo dunque usare il teorema di de L'Hôpital.

Chiamiamo  $f(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \sin t^2 dt$  e  $g(x) = x\sqrt{x}$ . Dobbiamo controllare che siano verificate le ipotesi del teorema di de L'Hôpital:

- $f(x)$  è continua in  $\mathbb{R}$ , dunque anche in  $I(0)$  (nell'intorno di zero in cui vogliamo applicare il teorema di de L'Hôpital). In particolare, essendo l'intervallo dell'integrale compreso tra 0 e  $\sqrt{x}$  a volte zero che  $f(x)$  sia continua in  $I(0^+)$ . Per il teorema fondamentale del calcolo integrale, essendo  $f(x)$  continua in  $[0, \sqrt{x}]$  è derivabile in  $I(0^+)$  e ha  $f'(x) = \sin(\sqrt{x})^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$ . Infatti  $\sqrt{x}$  è derivabile in  $I(0^+)$ ;
- $g(x)$  è continua in  $x \geq 0$  ed è derivabile in  $x > 0$ , quindi anche in  $I(0^+)$ . Inoltre  $g'(x) \neq 0$  in  $I(0^+)$ ;
- come già notato prima,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ ;
- esiste infine reale e finito il limite del rapporto tra le derivate prime delle due funzioni per  $x$  che tende a  $x_0 = 0$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sqrt{x})^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{3}{2}\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3} \cdot \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{3}$$

Ricordiamo che  $\sqrt{x}^2 = |x|$ , ma  $(\sqrt{x})^2 = x$  poiché  $x$  è sicuramente maggiore o uguale a zero essendo tale condizione già contenuta nel dominio di  $h(x) = \sqrt{x}$ ;  $D_h = [0, +\infty[$ .

Verificate tutte le ipotesi, possiamo concludere che:

$$F(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sqrt{x}} \sin t^2 dt}{x\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{3x} \right) = \frac{1}{3}$$

- in alcuni casi l'integrale ha entrambi gli estremi variabili (due funzioni di  $x$ ). Dato allora:

$$F(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t) dt$$



La derivada puma de  $F(x)$  es:

$$F'(x) = f(\alpha(x)) \cdot \alpha'(x) - f(\beta(x)) \cdot \beta'(x)$$